ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. siječnja 2020.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x broj učenika tog šestog razreda.
Tada učenika koji iz vladanja imaju ocjenu „dobro“ ili „loše“ ima:

$\frac{50}{100} \cdot x + \frac{1}{5}x =$ 1 BOD

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x$ 1 BOD

$= \frac{5}{10}x + \frac{2}{10}x$

$= \frac{7}{10}x$ 1 BOD

Ostatak, odnosno $\frac{3}{10}$ razreda, čine učenici s ocjenom „uzorno vladanje“.

Budući da ih je ukupno 9, možemo pisati $\frac{3}{10}x = 9$. 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobiva se da je $x = 30$. 1 BOD

U tom šestom razredu bilo je 30 učenika. 1 BOD

.... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka je x broj učenika tog šestog razreda.

Učenika dobrog vladanja ima 50% od x, lošeg vladanja $\frac{1}{5}x$, a 9 je učenika uzornog vladanja.

Ukupan broj učenika tog razreda dobit ćemo ako zbrojimo broj učenika lošeg, dobrog i uzornog vladanja, a to možemo zapisati jednadžbom:

$\frac{50}{100} \cdot x + \frac{1}{5}x + 9 = x$ 1 BOD

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x + 9 = x$ 1 BOD

$9 = \frac{10}{10}x - \frac{5}{10}x - \frac{2}{10}x$ 1 BOD

$9 = \frac{3}{10}x$ 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobiva se da je $x = 30$. 1 BOD

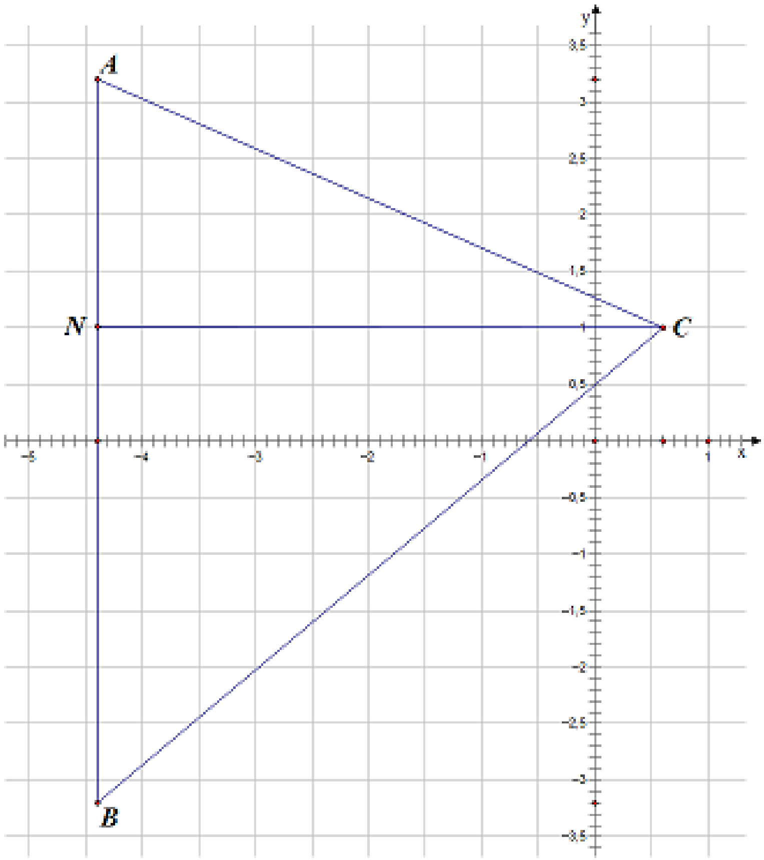
U tom šestom razredu bilo je 30 učenika. 1 BOD

.... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik može koristiti bilo koji zapis racionalnog broja (postotak, razlomak, decimalni broj).

2. Prvi način:

Točke A i C, zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.
Točka A je u drugom kvadrantu, a točka B, njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili x – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka B ima koordinate (– 4.4, – 3.2) i nacrtamo ju. 1 BOD
Tada je $|AB|$ = 6.4 jediničnih dužina. 1 BOD
Duljina visine nacrtane vrhom C na stranicu $\overline{AB}$ jednaka je $|CN|$ = 5 jediničnih dužina, pri čemu je točka N nožište visine. 1 BOD



1 BOD

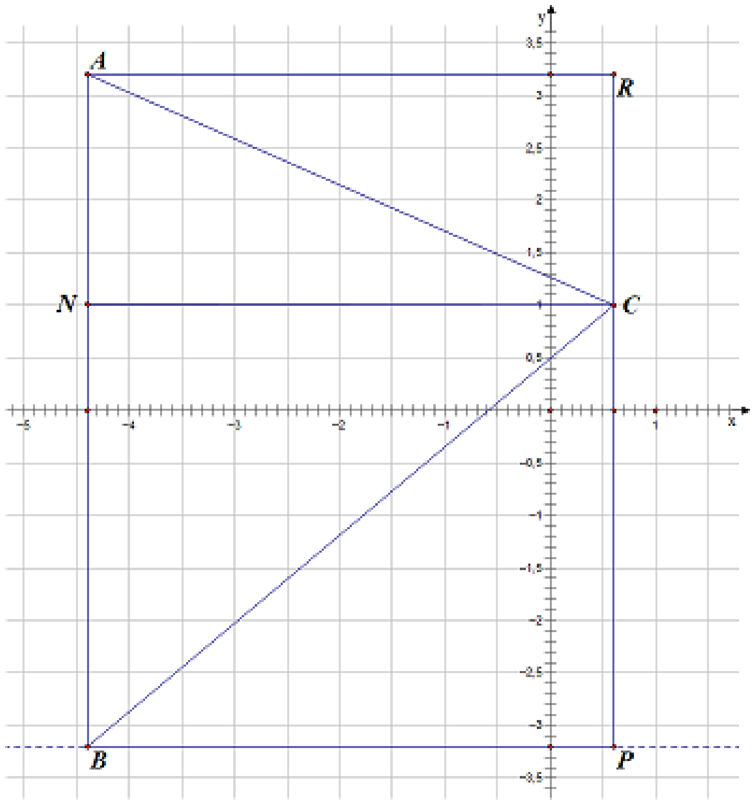
Površina trokuta ABC je $P_{ABC} = \dfrac{6.4 \cdot 5}{2}$. 1 BOD

$P_{ABC} = 16$ kvadratnih jedinca. 1 BOD

……………………………………………………………………….…........ UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Točke A i C, zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.
Točka A je u drugom kvadrantu, a točka B, njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili x – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka B ima koordinate (– 4.4, – 3.2) i nacrtamo ju. 1 BOD
Tada je $|AB|$ = 6.4 jediničnih dužina. 1 BOD
Nacrtamo pomoćni pravokutnik $BPRA$ kojemu je stranica $\overline{AB}$ trokuta jedna stranica, a treći vrh C trokuta je na stranici pravokutnika nasuprot stranici trokuta zajedničkoj s pravokutnikom.
Pravokutnik $BPRA$ ima površinu $P_{BPRA} = 6.4 \cdot 5 = 32$ kvadratne jedinice. 1 BOD



1 BOD

Kako bi odredili površinu trokuta *ABC* trebamo od površine tog pravokutnika oduzeti površine pravokutnih trokuta *ACR i BPC.*

Površina trokuta *ACR* iznosi $P_{ACR}=\dfrac{5\cdot 2.2}{2}=5.5$ kvadratnih jedinica.

Površina trokuta *BPC* iznosi $P_{BPC}=\dfrac{5\cdot 4.2}{2}=10.5$ kvadratnih jedinica. 1 BOD

Površina trokuta *ABC* je $P_{ABC}=32-5.5-10.5=16$ kvadratnih jedinica. 1 BOD

……………………………………………………………………………...... UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

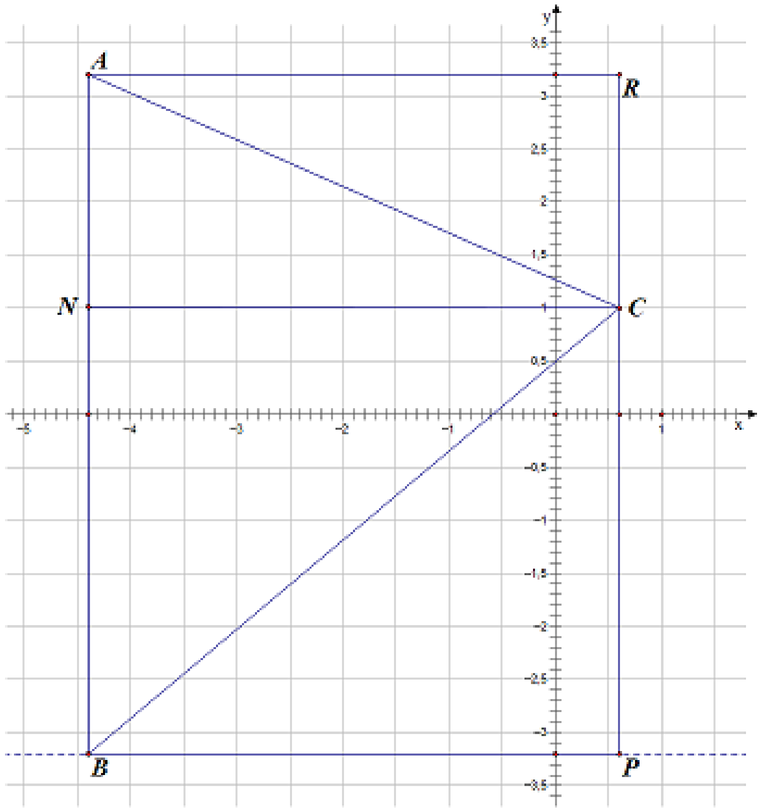
Točke *A* i *C*, zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.

Točka *A* je u drugom kvadrantu, a točka *B*, njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili x – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka *B* ima koordinate (– 4.4, – 3.2) i nacrtamo ju. 1 BOD

Tada je |*AB*| = 6.4 jediničnih dužina. 1 BOD

Nacrtamo pomoćni pravokutnik *BPRA* kojemu je stranica $\overline{AB}$ trokuta jedna stranica, a treći vrh *C* trokuta je na stranici pravokutnika nasuprot stranici trokuta zajedničkoj s pravokutnikom.

Pravokutnik *BPRA* ima površinu $P_{BPRA}=6.4\cdot 5=32$ kvadratne jedinice. 1 BOD



1 BOD

Ako u trokut *ABC* nacrtamo visinu vrhom *C* na stranicu na stranicu $\overline{AB}$, trokut *ABC* ćemo podijeliti na dva pravokutna trokuta. Tada će vrijediti

$$\Delta ANC \cong \Delta CRA$$

$$\text{i } \Delta NBC \cong \Delta BPC,$$

pa je površina trokuta *ABC* jednaka polovini površine pravokutnika *BPRA*. 1 BOD

Površina trokuta *ABC* je $P_{ABC} = \frac{32}{2} = 16$ kvadratnih jedinica. 1 BOD

……………………………………………………………………..…........ UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Učenik koji ne naznači mjerne jedinice ne gubi zbog toga naznačene bodove.
Napomena 2: Do točke *B* se moglo doći konstrukcijom osnosimetrične slika točke *A*, obzirom na os apscisa i onda nastaviti rješavanje zadatka kao u nekom od prikazanih načina. U tom slučaju taj korak bodovati s 1 BODOM.

3. Prva bušilica za 1 dan obavi $\frac{1}{20}$ posla.

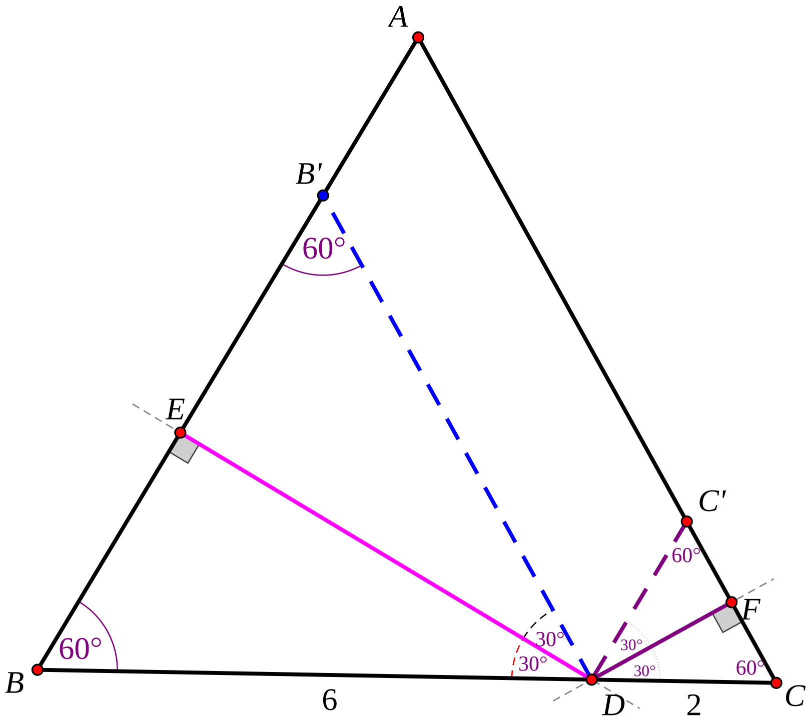
Druga bušilica za 1 dan obavi $\frac{1}{30}$ posla.

Treća bušilica za 1 dan obavi $\frac{1}{x}$ posla. 1 BOD

Sve tri bušilice zajedno za 1 dan obave $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{x}=\frac{1}{7}$ posla. 1 BOD

Množenjem jednadžbe sa zajedničkim nazivnikom 420 · *x* dobijemo
$21x + 14x + 420 = 60x$ 1 BOD
$420 = 25x$
$x = 16.8$ dana 1 BOD
$x = 16$ dana, 19 sati i 12 minuta 1 BOD
Treća bi bušilica posao napravila za točno 16 dana, 19 sati i 12 minuta. 1 BOD
……………………………………………………………………..…….... UKUPNO 6 BODOVA

4. Skica: 1 BOD



U jednakostraničnom trokutu *ABC* veličina kuta $\angle ABC$ jednaka je 60°, a trokut *BDE* je pravokutan, pa je $|\angle EDB| = 90° - 60° = 30°$. 1 BOD

Neka je točka *B*' (centralno) simetrična točki *B* s obzirom na točku *E*. 1 BOD

Tada je trokut BDB' jednakostraničan. 1 BOD

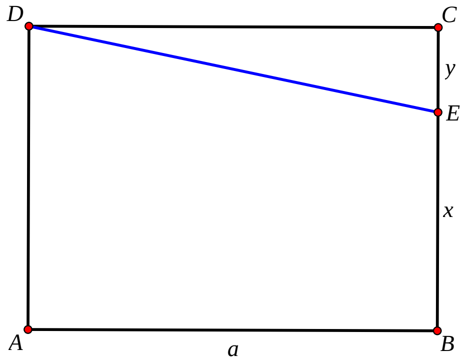
$|BB'| = |BD| = 6$ cm, a $|BE| = \frac{1}{2}|BB'| = 3$ cm. 1 BOD

Analogno, trokut DCC' je jednakostraničan, pri čemu je *C'* (centralno) simetrična točki *C* s obzirom na točku *F*, pa je $|CC'| = |DC| = 2$ cm, a $|CF| = \frac{1}{2}|CC'| = 1$ cm. 1 BOD

……………………………………………………………………..……........ UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Skica: 1 BOD



Neka je $|AB| = |DC| = a$, $|BE| = x$, $|EC| = y$. Tada je $|AD| = |BC| = x + y$.

Time je zadani pravokutnik *ABCD* razdijeljen na pravokutni trokut *ECD* i pravokutni trapez *ABED* kojemu su $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ osnovice, a $\overline{AB}$ visina. 1 BOD

$$P_{ABED} = \frac{(x+y)+x}{2} \cdot a$$ 1 BOD

$P_{ECD} = \frac{y}{2} \cdot a$ 1 BOD

Površina pravokutnog trokuta je manja od polovice površine pravokutnika pa je $P_{ABED} : P_{ECD} = 6 : 1$.
Primjenom formula za površine tih likova dobijemo:

$\frac{(2x+y) \cdot a}{2} : \frac{y \cdot a}{2} = 6:1$

$(2x + y) : y = 6 : 1$ 1 BOD

$2x + y = 6y$

$2x = 5y$

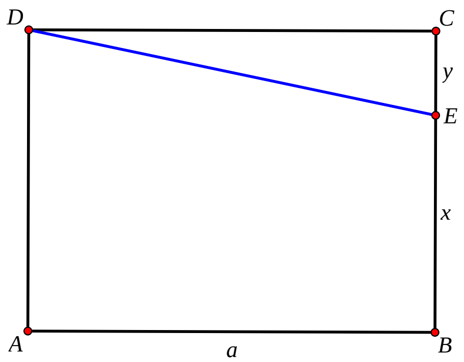
$x : y = 5 : 2$,

odnosno $|BE| : |CE| = 5:2$ ili $|CE| : |BE| = 2 : 5$. 1 BOD

…………………………………………………………………..…….......... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Neka je $|AB| = |DC| = a$, $|BE| = x$, $|EC| = y$. Tada je $|AD| = |BC| = x + y$.

Time je zadani pravokutnik *ABCD* podijeljen na pravokutni trokut *ECD* i pravokutni trapez *ABED*.
Površina trapeza *ABED* može se izračunati tako da se od površine pravokutnika *ABCD* oduzme površina pravokutnog trokuta *ECD*. 1 BOD

$P_{ABED} = a \cdot (x+y) - \frac{a \cdot y}{2}$ 1 BOD

$= ax + ay - \frac{ay}{2} = ax + \frac{ay}{2}$

$= \frac{a \cdot (2x+y)}{2}$

$P_{ECD} = \frac{a \cdot y}{2}$ 1 BOD

Površina pravokutnog trokuta je manja od polovice površine pravokutnika pa je $P_{ABED} : P_{ECD} = 6 : 1$.
Primjenom formula za površine tih likova dobijemo:

$\frac{(2x+y) \cdot a}{2} : \frac{y \cdot a}{2} = 6:1$

$(2x + y) : y = 6 : 1$ 1 BOD

$2x + y = 6y$

$2x = 5y$

$x : y = 5 : 2$,

odnosno $|BE| : |CE| = 5:2$ ili $|CE| : |BE| = 2 : 5$. 1 BOD

……………………………………………………………………….…….......... UKUPNO 6 BODOVA

6. Neka su $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ i $\frac{z}{c}$ traženi razlomci.

Tada vrijedi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{83}{72}$ i $x : y : z = 5 : 7 : 1$,

pa slijedi $x = 5k$, $y = 7k$, $z = k$. 1 BOD

Nadalje, iz $c : a = 1 : 4$ slijedi $a = 4c$. 1 BOD

Iz $b : c = 3 : 2$ slijedi $b=\frac{3}{2}c$. 1 BOD

Uvrštavanjem dobivenih izraza u početnu jednakost dobijemo:

$$\frac{5k}{4c}+\frac{7k}{\frac{3}{2}c}+\frac{k}{c}=\frac{83}{72}$$

$$\frac{5k}{4c}+\frac{14k}{3c}+\frac{k}{c}=\frac{83}{72}$$ 1 BOD

$$\frac{15k+56k+12k}{12c}=\frac{83}{72}$$ 1 BOD

$$\frac{83k}{12c}=\frac{83}{72}$$

Razlomci su skraćeni do kraja pa slijedi 1 BOD

$83k = 83$ i $12c = 72$,

tj. $k = 1$ i $c = 6$. 1 BOD

Slijedi da je $x = 5$, $y = 7$, $z = 1$ 1 BOD

i $c = 6$, $a = 24$, $b = 9$. 1 BOD

Traženi razlomci su $\frac{5}{24}$, $\frac{7}{9}$ i $\frac{1}{6}$. 1 BOD

………………………………………………………….………..…..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

$\frac{95}{100}\cdot 420 = 399$, odnosno 399 obitelji posjeduje TV. 1 BOD

$\frac{80}{100}\cdot 420 = 336$, odnosno 336 obitelji posjeduje kompjuter. 1 BOD

$399 + 336 = 735$ 1 BOD

$735 – 420 = 315$ 1 BOD

315 obitelji posjeduje TV i kompjuter.

$336 – 315 = 21$, odnosno 21 obitelj posjeduje samo kompjuter. 1 BOD

Broj svih mogućih ishoda je 420. 1 BOD

Broj povoljnih ishoda je 21, 1 BOD

pa je vjerojatnost povoljnog ishoda jednaka $p=\frac{21}{420}=\frac{1}{20}=0.05=5\%$. 2 BODA

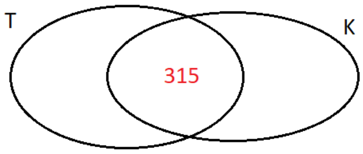
Vjerojatnost da obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%. 1 BOD

…………………………………………………………………….…...... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

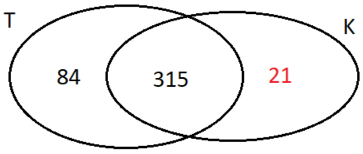
$\frac{95}{100}\cdot 420 = 399$, odnosno 399 obitelji posjeduje TV. 1 BOD

$\frac{80}{100}\cdot 420 = 336$, odnosno 336 obitelji posjeduje kompjuter. 1 BOD



1 BOD

Tada je 399 + 336 – 420 = 315, odnosno 315 obitelji posjeduje TV i kompjuter. 1 BOD



336 – 315 = 21, odnosno 21 obitelj posjeduje samo kompjuter. 1 BOD

(**Napomena:** Broj elemenata skupa $T \setminus K$ nije nužan za rješenje zadatka, pa se ne boduje.)

Broj svih mogućih ishoda je 420. 1 BOD

Broj povoljnih ishoda je 21, 1 BOD

pa je vjerojatnost povoljnog ishoda jednaka $p = \frac{21}{420} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$. 2 BODA

Vjerojatnost da obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%. 1 BOD

…………………………………………………………………..…......... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Sve ispitane obitelji posjeduju barem jedan od dva uređaja.

Prema tome, one obitelji koje nemaju TV sigurno imaju kompjuter 3 BODA

Vjerojatnost da nasumično odabrana obitelj posjeduje kompjuter, ali ne i TV (izražena postotkom) jednaka je postotku ispitanih obitelji koje nemaju TV. 3 BODA

U zadatku je zadano da 95/% ispitanih obitelji ima TV.

Dakle, onih koji nemaju TV, a imaju kompjuter ima 100 % – 95 % = 5 %. 2 BODA

Vjerojatnost da nasumično odabrana obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%.

2 BODA

…………………………………………………………………..…......... UKUPNO 10 BODOVA