

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. siječnja 2020.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$= (a + b)^2 - c^2$$

2 BODA

$$= (a + b + c)(a + b - c)$$

2 BODA

Uvrštavanjem se dobiva:

$$(786 + 389 + 175)(786 + 389 - 175) =$$

$$= 1\,350 \cdot 1\,000$$

1 BOD

$$= 1\,350\,000$$

1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Uvrštavanjem se dobiva:

$$786^2 - 175^2 + 389^2 + 2 \cdot 786 \cdot 389 =$$

$$= 617\,796 - 30\,625 + 151\,321 + 611\,508$$

4 BODA

$$= 587\,171 + 151\,321 + 611\,508$$

1 BOD

$$= 1\,350\,000$$

1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Neka su x i y traženi brojevi.

Prema uvjetu zadatka vrijedi: $(x + y) : (x - y) : (x \cdot y) = 5 : 1 : 18$.

Iz produženog omjera slijedi $(x + y) : (x - y) : (x \cdot y) = (5k) : (1k) : (18k)$, gdje je k prirodni broj, odnosno

$$x + y = 5k, x - y = k, x \cdot y = 18k.$$

1 BOD

Iz sustava prve dvije jednačbe slijedi $x = 3k, y = 2k$.

2 BODA

Iz treće jednačbe slijedi $6k^2 = 18k$, odnosno $6k = 18$, tj. $k = 3$.

2 BODA

To su brojevi $x = 3 \cdot 3 = 9$ i $y = 2 \cdot 3 = 6$.

1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka su x i y traženi brojevi.

Prema uvjetu zadatka vrijedi: $(x + y) : (x - y) : (x \cdot y) = 5 : 1 : 18$.

Iz produženog omjera slijedi: $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{1}$ i $\frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{5}{18}$.

1 BOD

Sređivanjem prvog razmjera slijedi $y = \frac{2}{3}x$,

2 BODA

a sređivanjem drugog razmjera slijedi $18x + 18y = 5xy$.

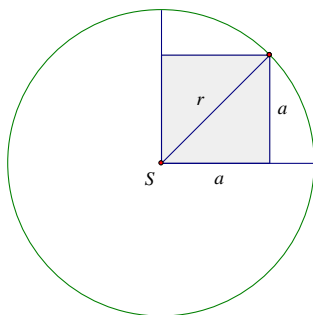
1 BOD

Rješavanjem ovog sustava dobiju se brojevi $x = 9$ i $y = 6$.

2 BODA

.....UKUPNO 6 BODOVA

3.



a – duljina stranice kvadrata
 d – duljina dijagonale kvadrata
 r – duljina polumjera

$$d = r \quad 1 \text{ BOD}$$

Primijenimo Pitagorin poučak na kvadrat:

$$a^2 + a^2 = r^2,$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} r. \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina kvadrata:

$$P_k = a^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\right)^2 = \frac{1}{2} r^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina kružnog isječka sa središnjim kutom veličine 90° je četvrtina površine kruga polumjera r :

$$P_i = \frac{1}{4} r^2 \pi. \quad 1 \text{ BOD}$$

Omjer površine kvadrata i površine kružnog isječka je

$$P_k : P_i = \left(\frac{1}{2} r^2\right) : \left(\frac{1}{4} r^2 \pi\right) = \frac{2}{\pi}. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2 : \pi \approx 2 : 3.14 = 0.636 \dots$$

Površina kvadrata približno je 64% površine kružnog isječka. 1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Površina kružnog isječka može se izračunati i pomoću središnjeg kuta veličine 90° .

$$P_i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{r^2 \pi \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4} r^2 \pi$$

4. Prvi način:

Vesna se kretala brzinom 10 km/h u odnosu na tlo, 1 BOD

pa je 500 m prešla za $t = \frac{s}{v} = \frac{0.5}{10} \text{ h} = \frac{1}{20} \text{ h}$. 2 BODA

Za to vrijeme, Damir se kretao brzinom 4 km/h u odnosu na tlo i prošao je

$$s = v \cdot t = 4 \cdot \frac{1}{20} \text{ km} = \frac{1}{5} \text{ km} = 200 \text{ m}. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$500 \text{ m} - 200 \text{ m} = 300 \text{ m}$$

Vesna je bila 300 m ispred Damira. 1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Vesna se kretala brzinom 10 km/h u odnosu na tlo. 1 BOD

Neka je x vrijeme za koje je Vesna prešla tih 500 m.

Iz razmjera $10 : 0.5 = 1 : x$ 1 BOD

slijedi $x = \frac{1}{20} \text{ h}$. 1 BOD

Vesna je 500 m prešla za $\frac{1}{20} \text{ h}$.

Za to vrijeme, Damir se kretao brzinom 4 km/h u odnosu na tlo.

Neka je y put koji je Damir prešao za to vrijeme.

Iz razmjera $4 : y = 1 : \frac{1}{20}$ 1 BOD

slijedi $y = 200 \text{ m}$. 1 BOD

Damir je za $\frac{1}{20}$ h prešao 200 m.

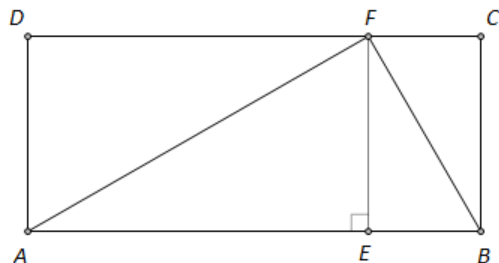
$$500 \text{ m} - 200 \text{ m} = 300 \text{ m}$$

Vesna je bila 300 m ispred Damira.

1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:



Neka je $|AD| = x$.

Trokuti $\triangle AFD$ i $\triangle FBC$ su slični pravokutni trokuti po poučku KK

1 BOD

($|\angle AFD| = |\angle FBC|$ i oba imaju kutove veličine 90°).

1 BOD

Iz sličnosti trokuta vrijedi jednakost omjera: $\frac{6}{x} = \frac{x}{2}$.

1 BOD

Nadalje je $x^2 = 12$ odnosno $x = 2\sqrt{3}$ cm.

1 BOD

Neka je E nožište visine iz vrha F na stranicu \overline{AB} .

Tada je $|EF| = 2\sqrt{3}$ cm,

1 BOD

pa je površina trokuta ABF jednaka $P = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko nije izveden postupak djelomičnog korjenovanja treba oduzeti 1 BOD.

Drugi način:

Neka je $|AD| = x$.

Trokuti $\triangle AFD$ i $\triangle FBC$ su slični pravokutni trokuti po poučku KK

1 BOD

($|\angle AFD| = |\angle FBC|$ i oba imaju kutove veličine 90°).

1 BOD

Iz sličnosti trokuta vrijedi jednakost omjera: $\frac{6}{x} = \frac{x}{2}$.

1 BOD

Nadalje je $x^2 = 12$ odnosno $x = 2\sqrt{3}$ cm.

1 BOD

Uočimo da je trokut $\triangle ABF$ pravokutan.

To možemo ustanoviti uočivši da je $|\angle DAF| + |\angle AFD| = 90^\circ$ i $|\angle FBC| + |\angle CFB| = 90^\circ$

(zbroy veličina šiljastih kutova u trokutu je 90°) i uvjeta zadatka $|\angle AFD| = |\angle FBC|$,

odakle je $|\angle BFA| = 180^\circ - |\angle AFD| - |\angle CFB|$, odnosno

$$|\angle BFA| = 180^\circ - (|\angle AFD| + |\angle CFB|) = 180^\circ - (|\angle FBC| + |\angle CFB|) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Duljine hipotenuza \overline{AF} i \overline{FB} pravokutnih trokuta $\triangle AFD$ i $\triangle FBC$ su:

$$|AF|^2 = 36 + 12 = 48, |AF| = 4\sqrt{3} \text{ cm i } |BF|^2 = 4 + 12 = 16, |BF| = 4 \text{ cm.}$$

1 BOD

Tako se površina trokuta ABF može izračunati pomoću umnoška duljina njegovih kateta:

$$P = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Ukoliko nije izveden postupak djelomičnog korjenovanja treba oduzeti 1 BOD.

Napomena 2: Ukoliko nedostaje obrazloženje da je trokut ABF pravokutan treba oduzeti 1 BOD.

Treći način:

Neka je $|AD| = x$.

Trokuti $\triangle AFD$ i $\triangle FBC$ su slični pravokutni trokuti po poučku KK

1 BOD

($|\angle AFD| = |\angle FBC|$ i oba imaju kutove veličine 90°).

1 BOD

Iz sličnosti trokuta vrijedi jednakost omjera: $\frac{6}{x} = \frac{x}{2}$.

1 BOD

Nadalje je $x^2 = 12$ odnosno $x = 2\sqrt{3}$ cm.

1 BOD

Duljine hipotenuza \overline{AF} i \overline{FB} pravokutnih trokuta $\triangle AFD$ i $\triangle FBC$ su:

$|AF|^2 = 36 + 12 = 48$, $|AF| = 4\sqrt{3}$ cm i $|BF|^2 = 4 + 12 = 16$, $|BF| = 4$ cm.

1 BOD

Obratom Pitagorinog poučka može se provjeriti da je $\triangle ABF$ pravokutan ($48 + 16 = 64$, a $64 = |AB|^2$).

Tako se površina trokuta ABF može izračunati pomoću umnoška duljina njegovih kateta:

$$P = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

1 BOD

.....UKUPNO 6 BODOVA

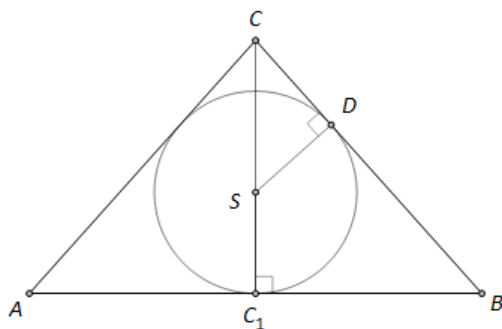
Napomena 1: Ukoliko nije izveden postupak djelomičnog korjenovanja treba oduzeti 1 BOD.

Napomena 2: Ukoliko nedostaje obrazloženje da je trokut ABF pravokutan treba oduzeti 1 BOD.

6. Prvi način:

Skica:

1 BOD



Neka je a duljina osnovice, b duljina kraka, a r duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice.

Trokuti $\triangle CC_1B$ i $\triangle SDC$ su slični po poučku KK:

1 BOD

trokuti su pravokutni, a kut $\angle DCS$ im je zajednički.

1 BOD

Stoga vrijedi omjer duljina odgovarajućih stranica: $|B_1C| : |BC| = |SD| : |SC|$

1 BOD

$$|B_1C| = \frac{a}{2}, |SC| = 20 - r$$

1 BOD

$$\text{odnosno } \frac{a}{2} : b = r : (20 - r).$$

1 BOD

Kako je $a : b = 4 : 3$ onda je $2 : 3 = r : (20 - r)$,

2 BODA

odakle se dobije $r = 8$ cm.

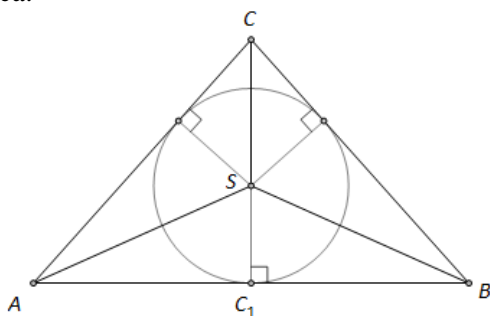
2 BODA

.....UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:

1 BOD



Neka je a duljina osnovice, b duljina kraka, a r duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice.

Iz omjera duljina osnovice i kraka slijedi $a : b = (4k) : (3k)$, gdje je k pozitivan realni broj.

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut CC_1B iz $20^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$ slijedi

$$k = 4\sqrt{5} \text{ cm},$$

1 BOD

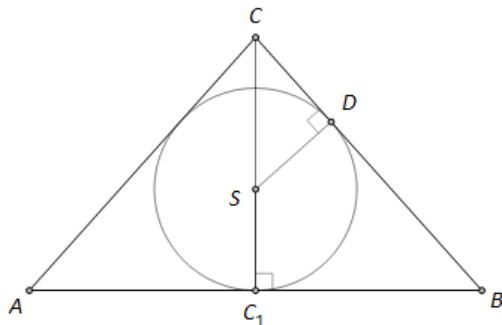
$$a = 16\sqrt{5} \text{ cm},$$

1 BOD

$b = 12\sqrt{5}$ cm.	1 BOD
Površina trokuta ABC je	
$P = \frac{16\sqrt{5} \cdot 20}{2} \text{ cm}^2 = 160\sqrt{5} \text{ cm}^2$.	1 BOD
Zbroj površina trokuta ABS , BCS i CAS jednak je površini trokuta ABC pa vrijedi:	1 BOD
$\frac{16\sqrt{5} \cdot r}{2} + \frac{12\sqrt{5} \cdot r}{2} + \frac{12\sqrt{5} \cdot r}{2} = 160\sqrt{5}.$	2 BODA
Rješavanjem ove jednadžbe slijedi da je $r = 8$ cm.	2 BODA
..... UKUPNO 10 BODOVA	

Treći način:

Skica: 1 BOD



Neka je a duljina osnovice, b duljina kraka, a r duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice. Iz omjera duljina osnovice i kraka slijedi $a:b = (4k) : (3k)$, gdje je k pozitivan realni broj.

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut CC_1B , iz $20^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$ slijedi

$$k = 4\sqrt{5} \text{ cm}, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$a = 16\sqrt{5} \text{ cm}, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$b = 12\sqrt{5} \text{ cm}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Trokuti $\triangle CC_1B$ i $\triangle SDC$ su slični po poučku KK: 1 BOD

trokuti su pravokutni, a kut $\angle DCS$ im je zajednički. 1 BOD

Stoga vrijedi omjer duljina odgovarajućih stranica: $\frac{a}{2} : b = |SD| : |SC|$, 1 BOD

$$\text{odnosno } 8\sqrt{5} : 12\sqrt{5} = r : (20 - r) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{odakle se dobije } r = 8 \text{ cm}. \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Neka je \overline{abcdef} takav da je $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq f$.

Takvih je ukupno $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ brojeva. 2 BODA

Od njih 720, manji od 345612 su brojevi:

- $\overline{1bcdef}, \overline{2bcdef}$.

$$\text{Takvih je brojeva } 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240. \quad 2 \text{ BODA}$$

- $\overline{31cdef}, \overline{32cdef}$.

$$\text{Takvih je brojeva } 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48. \quad 2 \text{ BODA}$$

- $\overline{341def}, \overline{342def}$.

$$\text{Takvih je brojeva } 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12. \quad 1 \text{ BOD}$$

- $\overline{3451de}, \overline{3452de}$.

$$\text{Takvih je brojeva } 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Brojeva koji su manji od 345612 je ukupno } 240 + 48 + 12 + 4 = 304. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Brojeva koji su veći od 345612 je } 720 - 304 - 1 = 415. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je \overline{abcdef} takav da je $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq f$.

Takvih je ukupno $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ brojeva.

2 BODA

Od njih 720, veći od 345612 su brojevi:

- $\overline{4bcdef}, \overline{5bcdef}, \overline{6bcdef}$.

Takvih je brojeva

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360.$$

2 BODA

- $\overline{35cdef}, \overline{36cdef}$.

$$\text{Takvih je brojeva } 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48.$$

2 BODA

- $\overline{346def}$.

$$\text{Takvih je brojeva } 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

1 BOD

- $\overline{345621}$

Takav je jedan broj.

1 BOD

Brojeva koji su veći od 345612 je ukupno $360 + 48 + 6 + 1 = 415$.

1 BOD

Brojeva koji su manji od 345612 je $720 - 415 - 1 = 304$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA